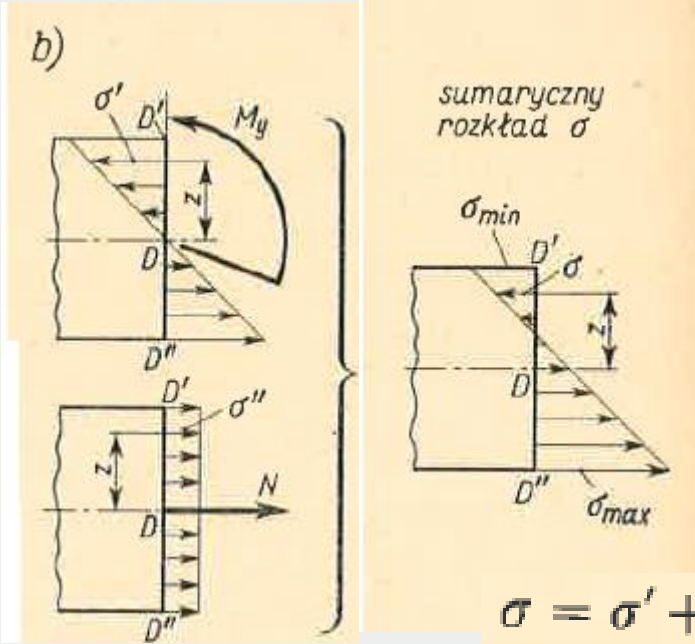
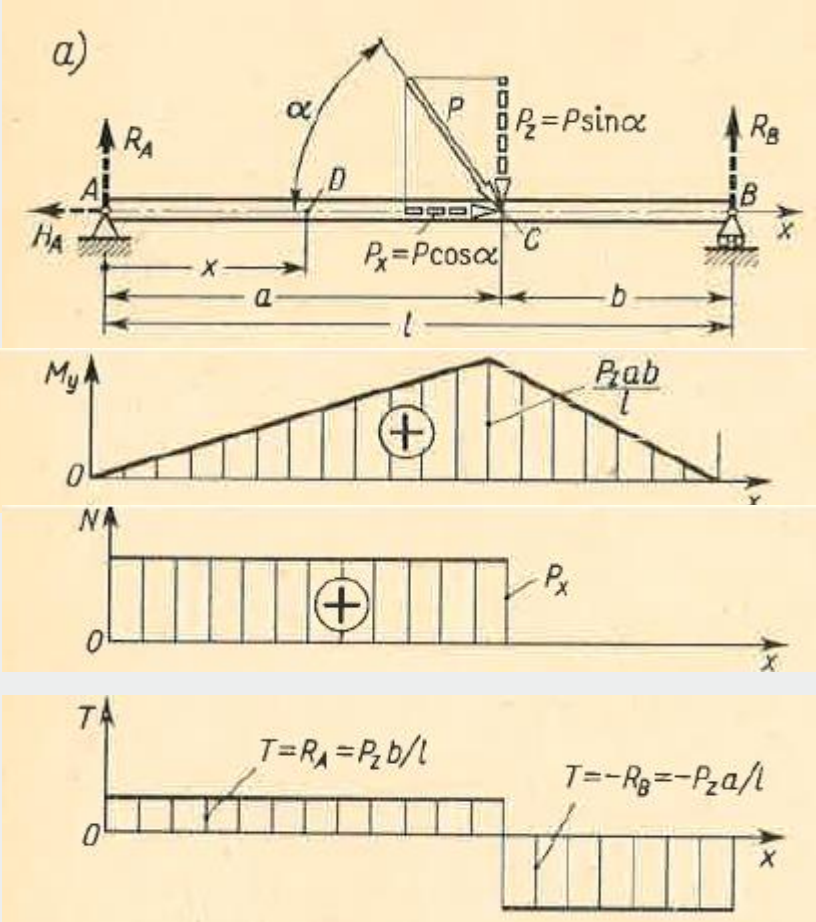


Wytrzymałość konstrukcji 1

Wykład 13

Wytrzymałość prętów krępych

Zginanie prętów krępych przy istnieniu sił wzdłużnych



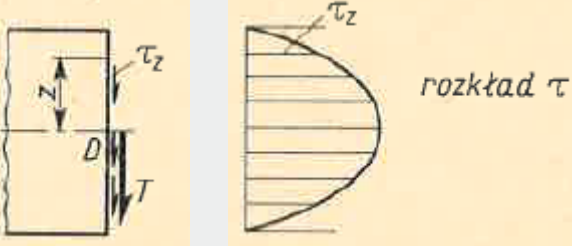
$$\sigma' = -M_y z / J_y$$

$$\sigma'' = N / A$$

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = (N/A) - (M_y z / J_y)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y'}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y''}$$



$$\tau_z = T S_y^{(z)} / J_y b_z$$

Analiza jednoczesnego zginania i rozciągania

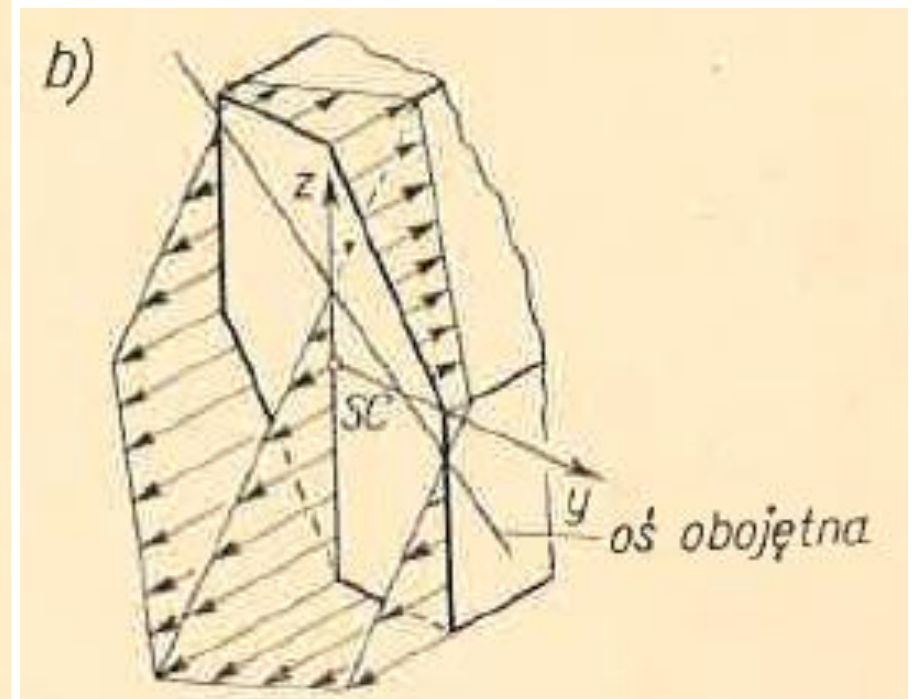
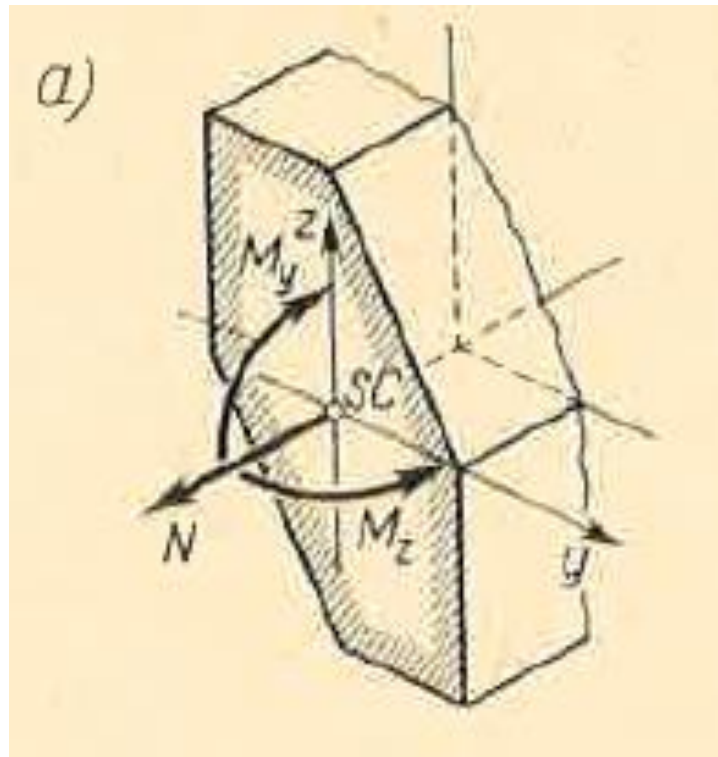
Zginanie prętów krępych przy istnieniu sił wzdłużnych

W przypadku ukośnego zginania i jednoczesnego rozciągania lub ściskania

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z}$$

Jednoczesne zginanie ukośne i rozciąganie

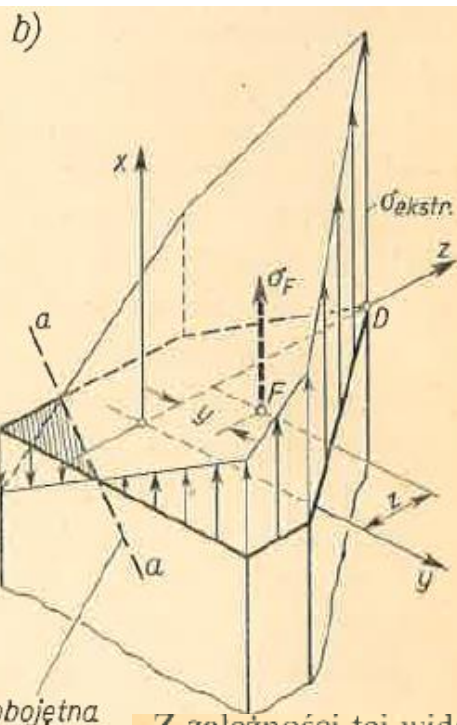
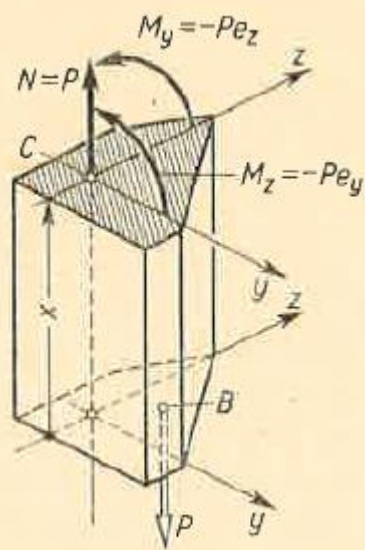
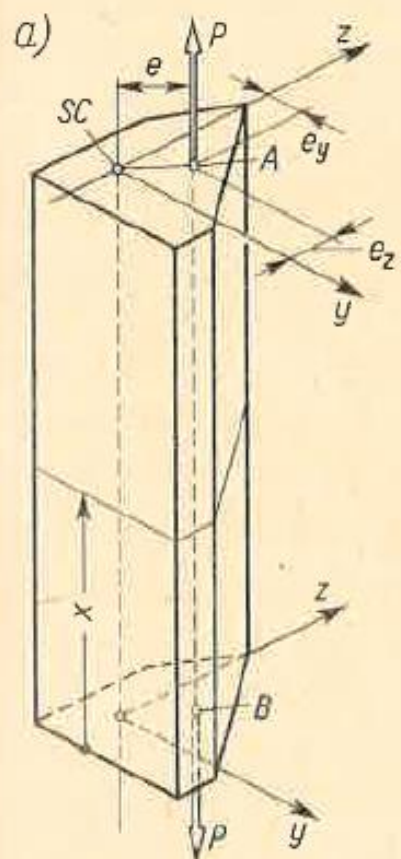
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{\varpi M_y z}{J_y} - \frac{\varpi M_z y}{J_z}$$



Mimośrodowe rozciąganie lub ściskanie prętów

Szczególnym przypadkiem zginania i jednoczesnego rozciągania lub ściskania jest *mimośrodowe rozciąganie lub ściskanie*.

Odległość e między linią działania siły a osią nazywamy *mimośrodem siły*.



$$N = P, \quad M_y = -Pe_z, \quad M_z = -Pe_y,$$

$$\sigma_F = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{J_y} + \frac{Pe_y y}{J_z}$$

Aby wyznaczyć ekstremalne naprężenie σ_e , celowe jest znaleźć naprzód oś obojętną $a-a$, dla której $\sigma_F = 0$,

$$\left(\frac{1}{A}\right) + \left(\frac{ze_z}{J_y}\right) + \left(\frac{ye_y}{J_z}\right) = 0$$

promieni e bezwładności i_y, i_z

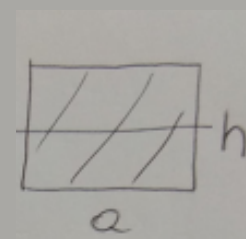
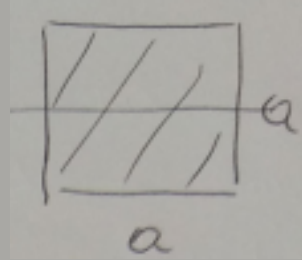
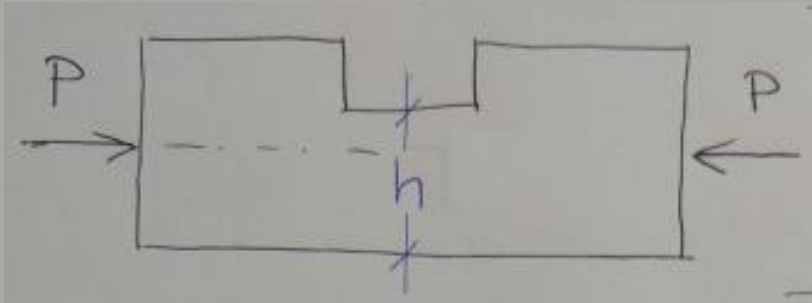
$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$$

$$\frac{e_z z}{i_y^2} + \frac{e_y y}{i_z^2} + 1 = 0$$

Analiza mimośrodowego rozciągania

Z zależności tej widać, że przy dostatecznie małych mimośrodkach e_y i e_z oś obojętna jest przesunięta poza obręb materialnego przekroju pręta. To oznacza, że na całym przekroju działają jednoimienne naprężenia. Przypadek taki ma duże znaczenie w konstrukcjach inżynierskich, w których stosowane są materiały, jak cegła lub beton, mające małą wytrzymałość na rozciąganie i wielokrotnie większą wytrzymałość na ściskanie. W konstrukcjach takich pożądane jest, aby przy mimośrodowym ścisnieniu pręta naprężenia na całym polu przekroju były ścisające. Spełnienie tego warunku jest możliwe, gdy mimośród siły nie wykracza poza pewne granice. W konstrukcjach maszynowych zagadnienie to nie ma dużego znaczenia.

Zad. 13.1 - Mimośrodowe ściskanie prętów krępych



$$A = ah$$

$$J_y = \frac{a \cdot h^3}{12}$$

$$W_y = \frac{ah^2}{6}$$

$$N + P = 0$$

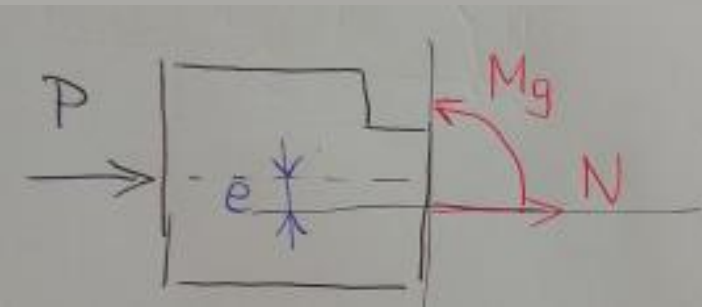
$$N = -P$$

$$\sigma^{\text{extr}} = \frac{N}{A} \mp \frac{M}{W_y}$$

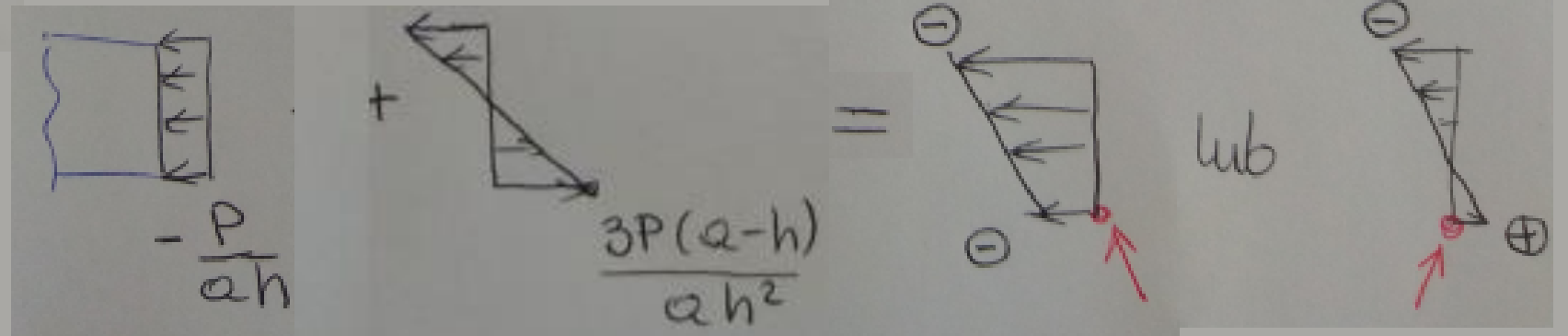
$$M_g - P \cdot e = 0$$

$$M_g = P \cdot e$$

$$\sigma^{\text{extr}} = -\frac{P}{a \cdot h} \mp \frac{P \cdot e}{\frac{ah^2}{6}} = -\frac{P}{ah} \mp \frac{3P(a-h)}{ah^2}$$



$$e = \frac{a-h}{2}$$



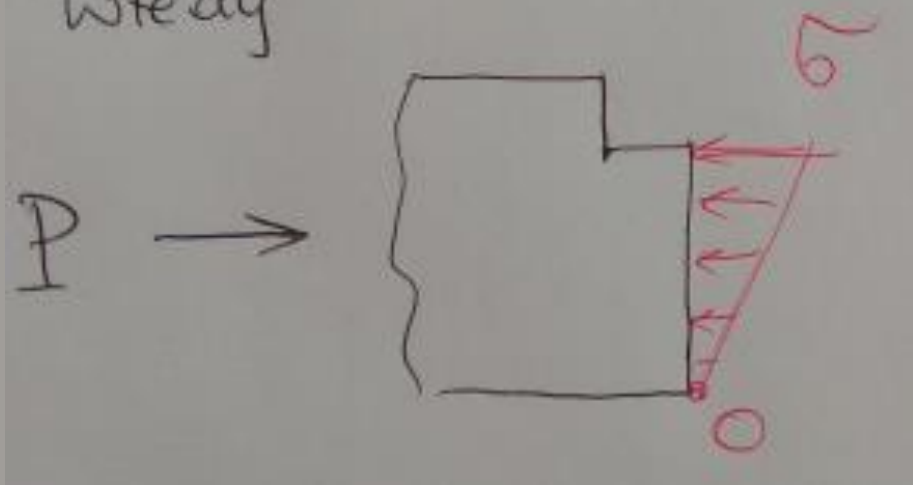
Niebezpieczeństwo rozciągania ($h \downarrow$)

Jaka jest granica pocienienia $h_{\min} = ?$

wtedy $\bar{b} = 0$

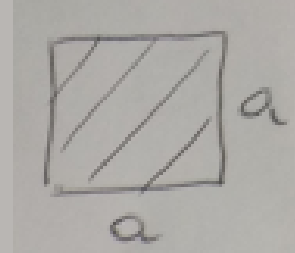
$$-\frac{P}{ah} + \frac{3P(a-h)}{ah^2} = 0$$

wtedy

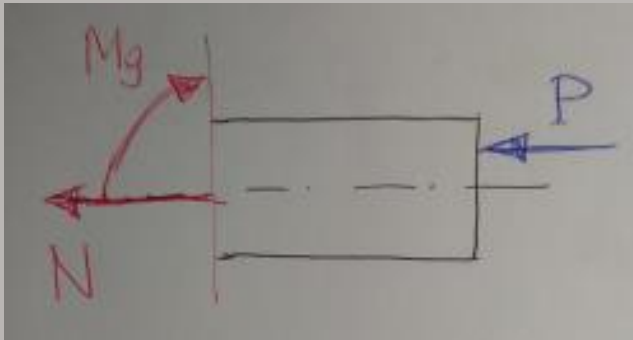


$$h = 3(a-h) \Rightarrow h_{\min} = \frac{3}{4}a$$

Zad. 13.2 - Mimośrodowe ściskanie prętów krępych



$$J_y = \frac{a^4}{12}$$



$$N = -P$$

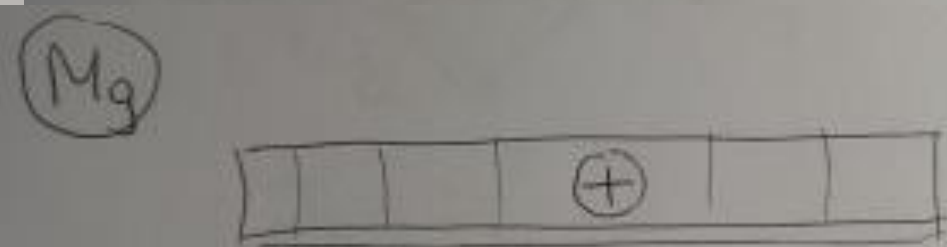
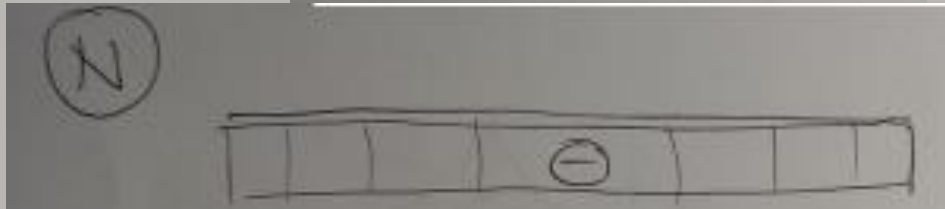
$$M_g = P \cdot e$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = -\frac{P}{a^2}$$

$$\sigma_{M_g} = -\frac{M_g}{J_y} \cdot z$$

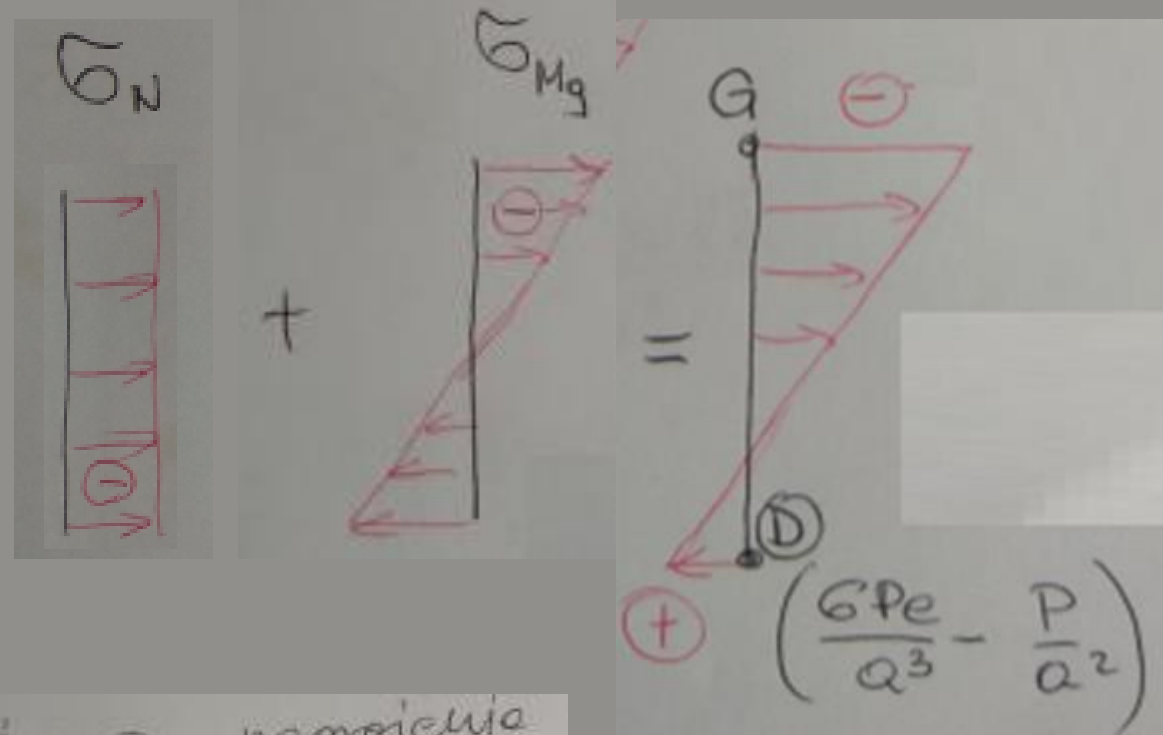
$$\sigma_{M_g} = -\frac{P \cdot e}{\frac{a^4}{12}} \cdot z$$

$\pm \frac{a}{2}$



$$\sigma_N + \sigma_{Mg} = \sigma$$

$$\sigma_{Mg}^{ext} = + \frac{6Pe}{a^3}$$



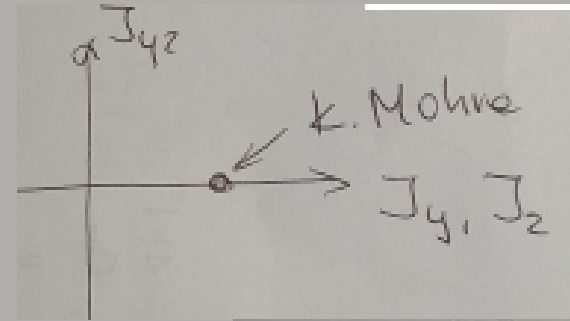
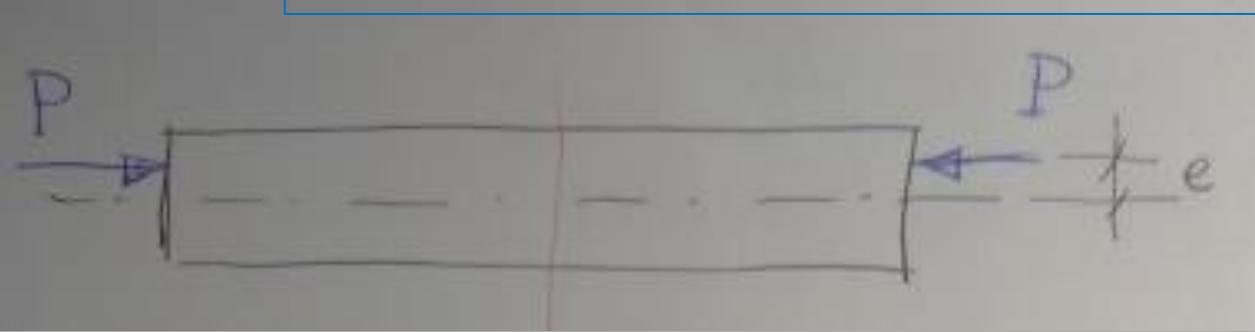
Znaleźć e_{max} , dla którego naprężenia w punkcie dolnym (D) osiągną 0

$$\frac{6Pe}{a^3} - \frac{P}{a^2} = 0$$

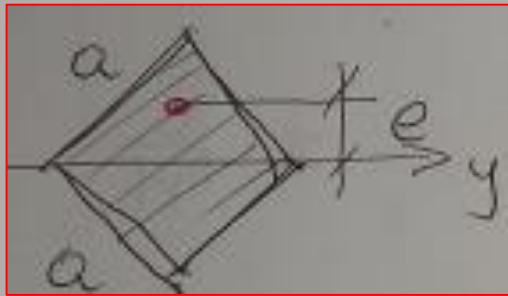
$$\Rightarrow \frac{P(6e - a)}{a^3} = 0$$

$$e_{max} = \frac{a}{6} = 0,167a$$

Zad. 13.3 - Mimośrodowe ściskanie prętów krępych (inne przekroje)



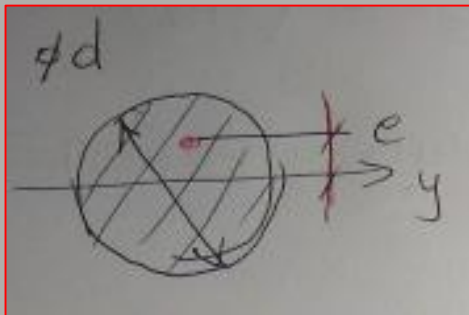
$$J_y = \frac{a^4}{12}$$



$$\sigma_{mg} \sim -\frac{P \cdot e}{a^4/12} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{6P \cdot e \sqrt{2}}{a^3}$$

$$\frac{6P \cdot e \sqrt{2}}{a^3} - \frac{P}{e^2} = 0$$

$$e_{\max} = \frac{a}{6\sqrt{2}} = 0.118a$$



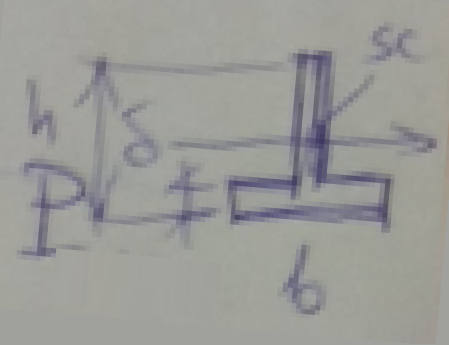
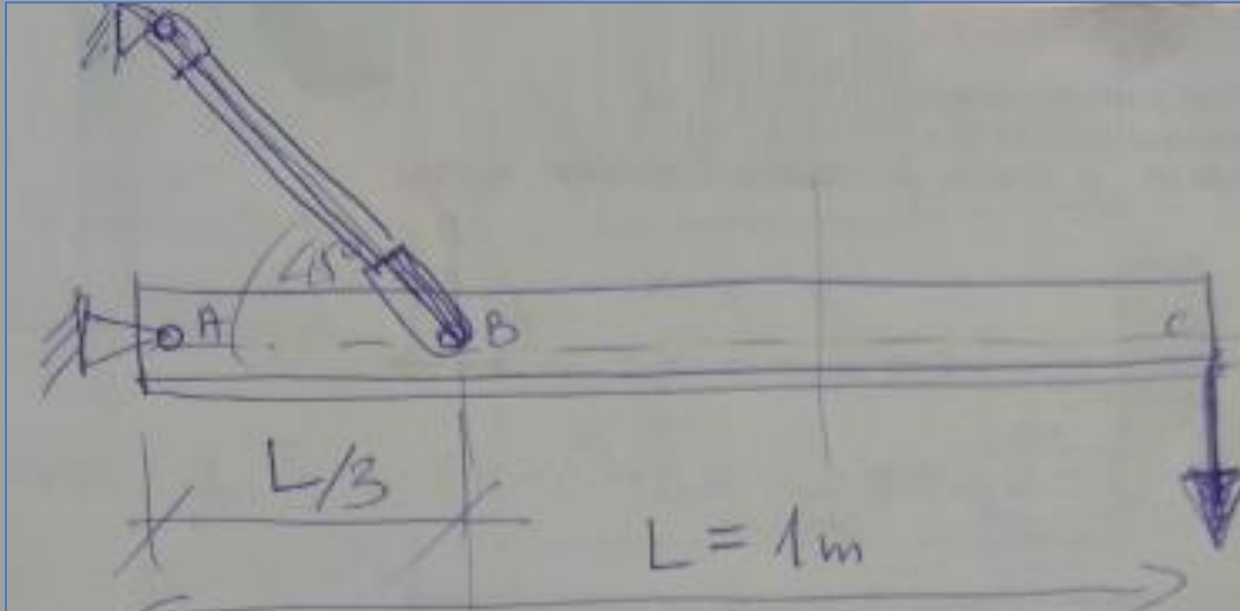
$$\sigma_{mg} \sim -\frac{P \cdot e}{\frac{\pi d^4}{64}} \cdot \frac{d}{2} = -\frac{32}{\pi} \frac{P \cdot e}{d^3}$$

$$\frac{32}{\pi} \cdot \frac{P \cdot e}{d^3} - \frac{4P}{\pi d^2} = 0$$

$$\frac{P}{\pi d^3} (32 \cdot e - 4d) = 0$$

$$e_{\max} = \frac{d}{8} = 0.125d$$

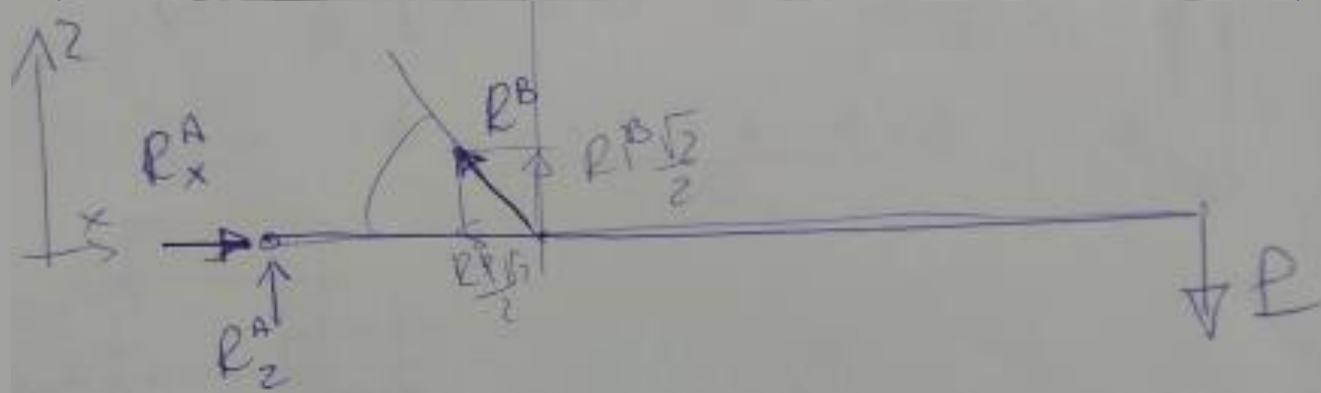
Zadanie 13.4



$$h = 50\text{ mm}$$

$$b = 60$$

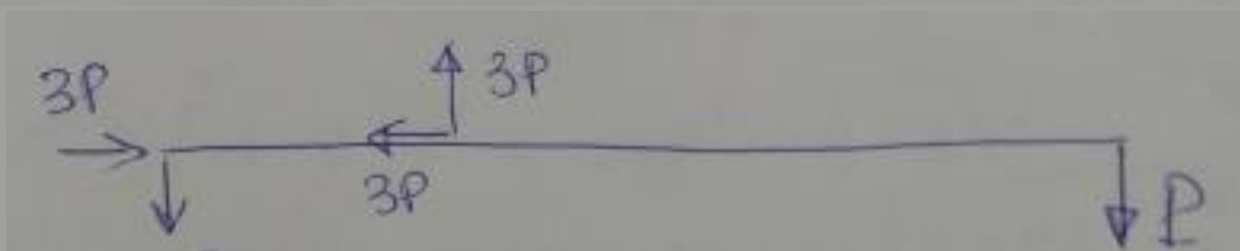
$$\delta = 10$$

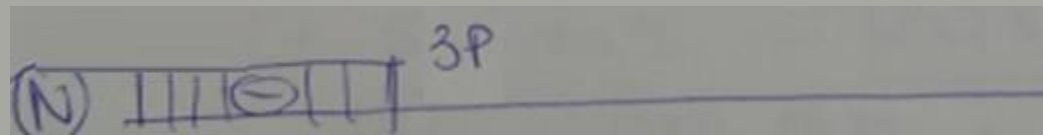
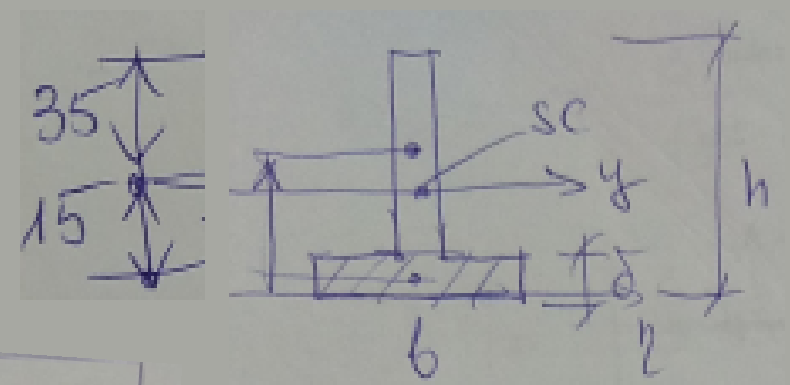
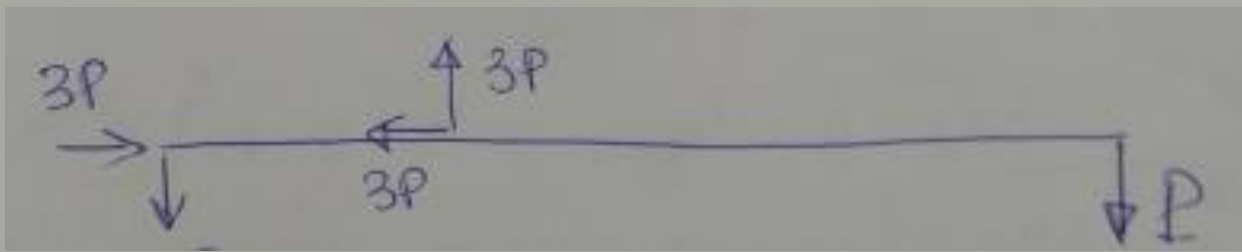


$$\sum M_A = 0$$

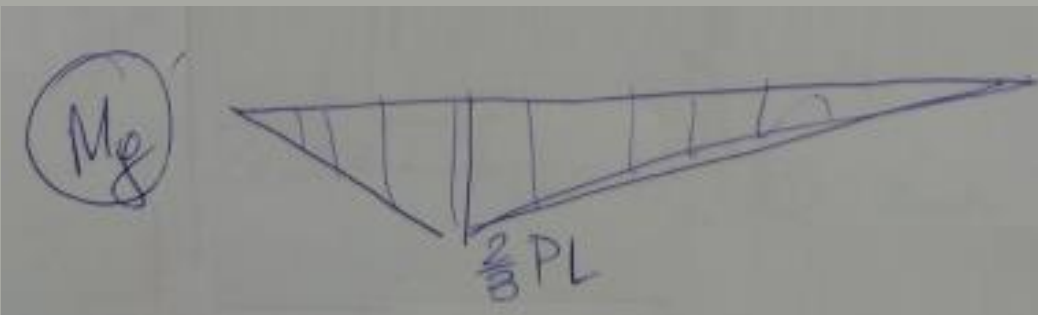
$$-P \cdot L + R^B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0$$

$$R^B = 3\sqrt{2}P$$





$$\bar{y}_c = \frac{1}{A} \int \bar{y} dA$$

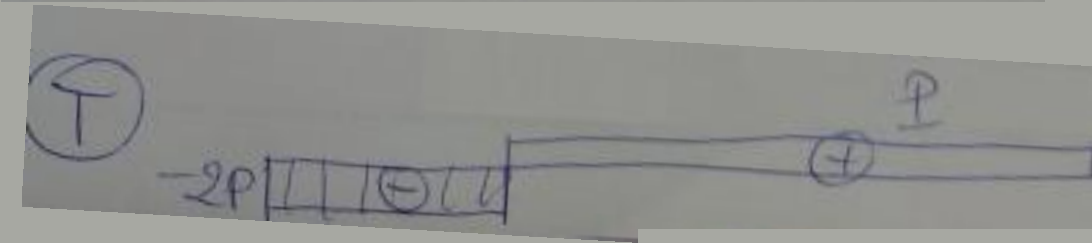


$$A = b \cdot \delta + (h - \delta) \cdot \delta = \underbrace{6 \cdot 1}_{A_1} + \underbrace{(5 - 1) \cdot 1}_{A_2} = 6 + 4$$

$$A = 10 \text{ cm}^2$$

$$\bar{y}_c = \frac{1}{A} \left(b \cdot \delta \cdot \frac{\delta}{2} + (h - \delta) \cdot \delta \cdot \frac{h + \delta}{2} \right)$$

$$\bar{y}_c = \frac{6 \cdot 0,5 + 4 \cdot 3}{10} = \frac{3 + 12}{10} = 1,5 \text{ cm}$$



$$J_y = \frac{6 \cdot 1^3}{12} + 6 \cdot 1^2 + \frac{1 \cdot 4^3}{12} + 4 \cdot 1,5^2$$

$$J_y = 0,5 + 6 + 5,3 + 9 = 20,83 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_N = -\frac{3P}{A}$$

$$|\sigma^{\text{G}}| = \left| \frac{2}{3} \frac{PL}{J_y} z_{\text{max}} - \frac{3P}{A} \right| \leq k_v$$

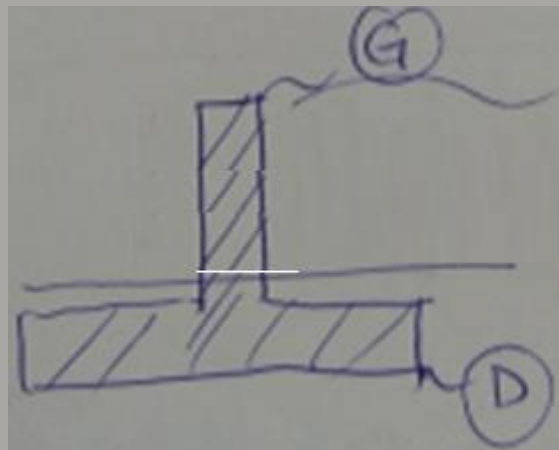
$$\text{G} \quad P \leq \frac{k_v}{\frac{2}{3} \frac{L z_{\text{max}}}{J_y} - \frac{3}{A}} = \frac{100 \cdot 10^6}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 0,035}{20,83 \cdot 10^{-8}} - \frac{3}{10 \cdot 10^{-4}}}$$

$$P \leq 917 \text{ N}$$

$$|\sigma^{\text{D}}| = \left| -\frac{2}{3} \frac{PL}{J_y} z_{\text{min}} - \frac{3P}{A} \right| \leq k_v$$

$$\text{D} \quad P \leq \frac{k_v}{\frac{2}{3} \frac{L z_{\text{min}}}{J_y} + \frac{3}{A}} = \frac{100 \cdot 10^6}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 0,015}{20,83 \cdot 10^{-8}} + \frac{3}{10 \cdot 10^{-4}}}$$

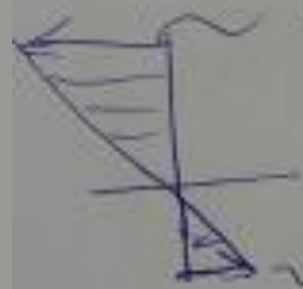
$$P \leq 1960 \text{ N}$$



$$\sigma^{\text{G}}_{M_y} = -\frac{2}{3} \frac{PL}{J_y} \cdot z_{\text{max}}$$

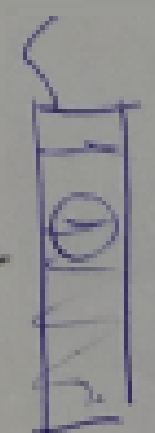
$$\sigma^{\text{D}}_{M_y} = \frac{2}{3} \frac{PL}{J_y} \cdot z_{\text{min}}$$

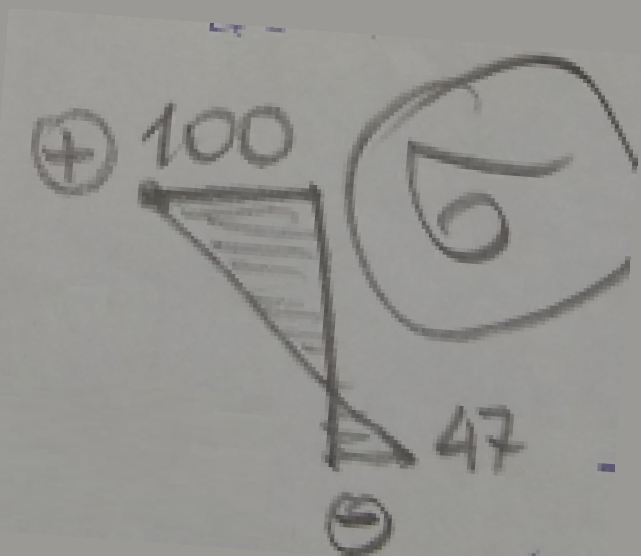
$$P_{\max} = 917 \text{ N}$$



$$+\frac{2}{3} \cdot \frac{917 \cdot 1}{20,83} \cdot 3,5 = 102,7 \text{ MPa}$$

$$+\frac{2}{3} \cdot \frac{917 \cdot 1}{20,83 \text{ cm}^2} \cdot (-1,5) = -44 \text{ MPa}$$

$$+\frac{-3 \cdot 917}{1000} = -2,7 \text{ MPa}$$


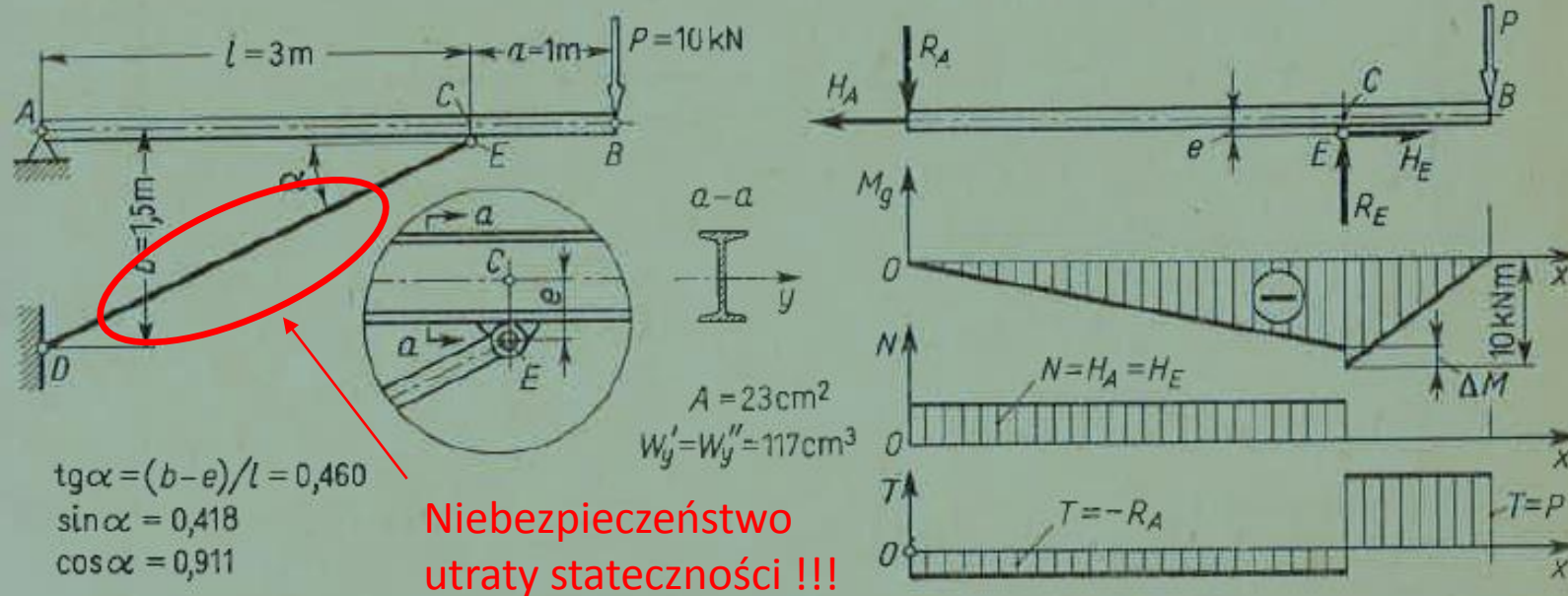


$$\tau_{\max} = \frac{917}{400} = 2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{av}} = \frac{917}{1000} = 0,917 \text{ MPa}$$

Zadanie 13.5 (z książki prof. Brzoski)

2. Nieważka dwuteowa belka ACB (rys. 6.12) podparta jest prętem DE , przy czym przegub E jest umocowany na belce mimośrodowo ($e = 12$ cm). Wyznaczyć σ_e w niebezpiecznym przekroju belki.



Rys. 6.12. Przykład liczbowy

Rozwiązanie. Istotne w tym zadaniu jest zbadanie roli mimośrodu e . Z warunku równowagi momentów względem A mamy ściskającą siłę w pręcie DE : $N' = P(l + a) / b \cos \alpha = 29,4\text{ kN}$. Na belkę w punkcie E działają składowe $R_E = N' \sin \alpha = 12,3\text{ kN}$ i $H_E = N' \cos \alpha = 26,7\text{ kN}$. Wykres M_g ma w punkcie C przeskok ΔM , albowiem dla przekroju tuż na prawo od punktu C jest $M_g = Pa = 10\text{ kNm}$, natomiast w przekroju tuż na lewo od tego punktu jest $M'_g = Pa - H_E e = 6,8\text{ kNm}$. Badając σ_e w pierwszym przypadku mamy $\sigma_e = 10 \cdot 10^3 / 117 \cdot 10^{-6} = 85\text{ MPa}$, natomiast w przekroju drugim $\sigma_e = (H_E / A) + [(Pa - H_E e) / W_y] \approx 70\text{ MPa}$. Niebezpieczny jest więc przekrój tuż z prawej strony C .